№12-дәріс

Жоғарғы ретті туынды және дифференциалдар. Лейбниц формуласы. Тейлор формуласы. Лопиталь ережелері.

Туынды және жоғарғы ретті дифференциалдар

$y = f(x) \in C^1[a;b]$ болсын. Егер $z = f'(x) \in C^1[a;b]$ болса, онда z' $y = f(x)$ функциясының екінші туындысы деп аталады және былай белгіленеді: $f''(x)$. Яғни,

$$f''(x) = [f'(x)]' \quad \text{немесе} \quad y''(x) = [y'(x)]'$$

Анықтама. $y = f(x)$ функциясының n-ші ретті туындысы деп $(n-1)$-ші ретті туындыдан алынған туындыны айтамыз, яғни,

$$f^{(n)}(x) = \left[f^{(n-1)}(x)\right]'$$

Мысал 1. $y = x^2 \Rightarrow y' = 2x \Rightarrow y'' = 2 \Rightarrow y''' = 0 \Rightarrow y^{IV} = 0\ldots$

$dy = f'(x) \in C^1[a;b]$ болсын. Онда $d^2y = d(dy)$ $f(x)$ функциясының екінші ретті дифференциалы деп аталады. Бұдан

$$d^2y = d(dy) = [f'(x)dx]'dx = f''(x)(dx)^2 = f''(x)dx^2.$$

Анықтама . $y = f(x)$ функциясының n-ші ретті дифференциалы деп $(n-1)$-ші ретті дифференциалды тағы бір рет дифференциалдауды айтамыз және

$$d^n y = f^{(n)}(x)dx^n \tag{1}$$

(6)-дан

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n} \tag{2}$$

шығады. (1) және (2) теңдіктер x айнымалысы тәуелсіз айнымалы болған жағдайда ғана ақиқат.

$y = F(u)$, $u = \varphi(x)$ болсын. Онда $dy = F'(u)du$.

$$d^2y = d[F'(u)du] = d[F'(u)]du + F'(u)d(du) = F''(u)(du)^2 + F'(u)d^2u,$$

яғни, дифференциалдың формасының инварианттылығы сақталмайды.

$\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ түріндегі анықталмағандықтарды ашу. Лопиталь ережесі.

Мысал 2.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln^2 x}{x^3} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{[\ln^2 x]'}{(x^3)'} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2\ln x}{x}}{3x^2} = \lim_{x\to\infty}\frac{2\ln x}{3x^3} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{(2\ln x)'}{(3x^3)'} = \frac{2}{3}\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{3x^2} = \frac{2}{9}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{3x^3} = 0.$$

(8)-ші формуланың сол жағынның шегі табылуы мүмкін, ал оң жағының шегі – табылмайды.

Мысал 3.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cdot\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim_{x\to 0}x\cdot\sin\frac{1}{x}=0.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(x^2\sin\frac{1}{x}\right)'}{(\sin x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{2x\cdot\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}}{\cos x}=\lim_{x\to 0}2x\cdot\sin\frac{1}{x}-\lim_{x\to 0}\cos\frac{1}{x}=0-\lim_{x\to 0}\cos\frac{1}{x}$$ - шегі табылмайды.

Мысал 4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{\sin 5x}$ шегін есепте.

Берілген бөлшектің алымы мен бөлімі үзіліссіз, дифференциалданатын және нөлге ұмтылатын функция. Яғни, Лопиталь ережесін екі рет қолдана аламыз :

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{x^2}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{4\sin x}{2x}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{4*4\cos 4x}{2}=8.$$